

## Kolokwium nr 1. z 25 listopada 2024 — rozwiązania wzorcowe

**Uwaga:** Przedstawione poniżej rozwiązania nie są jedynymi możliwymi rozwiązaniami, za które można było uzyskać maksymalną liczbę punktów.

**Zadanie 1.** Określmy  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  wzorem  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^5 y^4}}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- a) Wykazać, że  $f$  jest ciągła na  $\mathbb{R}^2$ .  
b) Znaleźć wszystkie punkty różniczkowalności funkcji  $f$ .

**Rozwiązanie.**

a) Zauważmy, że w każdym punkcie  $(x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$  funkcja  $f$  jest ciągła ponieważ zarówno licznik jak i mianownik są ciągłe a mianownik jest różny od zera. Wystarczy wykazać, że  $f(x, y) \rightarrow 0$  przy  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Ponieważ w mianowniku występuje  $x^2 + y^2$  a w liczniku iloczyn  $x$  i  $y$  w pewnych potęgach, skorzystamy ze znanej nierówności  $x^2 + y^2 \geq 2|x||y|$ . Mamy zatem

$$\left| \frac{\sqrt[3]{x^5 y^4}}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^{5/3} |y|^{4/3}}{2|x||y|} = \frac{1}{2} |x|^{2/3} |y|^{1/3} \rightarrow 0$$

przy  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . To kończy dowód ciągłości  $f$  na  $\mathbb{R}^2$ .

b) Niech  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . Weźmy kulę  $B$  o środku w  $(x_0, y_0)$  i promieniu na tyle małym, aby  $(0, 0) \notin B$ . Z postaci funkcji  $f$  jasne jest, że pochodne cząstkowe funkcji  $f$  są określone w całej kuli  $B$  oraz są ciągłe w  $(x_0, y_0)$ . Stąd wynika, że  $f$  jest różniczkowalna w  $(x_0, y_0)$ . Pozostaje nam sprawdzić różniczkowalność  $f$  w  $(0, 0)$ .

Najpierw znajdziemy kandydata na różniczkę. W tym celu policzymy pochodne cząstkowe funkcji  $f$  w  $(0, 0)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$

bo  $f(h, 0) = 0$ . Analogicznie  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . A zatem musimy sprawdzać, czy

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - [0, 0] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt[3]{h_1^5 h_2^4}}{(\sqrt{h_1^2 + h_2^2})^3} \stackrel{?}{=} 0.$$

Zauważmy, że wykładniki w liczniku i mianowniku są takie same. Weźmy zatem  $h_1 = h_2 = h$ . Wówczas mamy

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt[3]{h_1^5 h_2^4}}{(\sqrt{h_1^2 + h_2^2})^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^9}}{(\sqrt{2h^2})^3} \neq 0.$$

Zatem  $f$  jest różniczkowalna we wszystkich punktach  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  i nie jest różniczkowalna w  $(0, 0)$ .

**Zadanie 3.** Załóżmy, że funkcja  $f: (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna. Wykazać, że  $f$  spełnia równanie

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{xy} f(x, y) \quad \text{dla wszystkich } x, y > 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka różniczkowalna  $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , że  $f(x, y) = xy\varphi(x^2 + y^2)$  dla wszystkich  $x, y > 0$ .

**Rozwiązanie.**

Najpierw udowodnimy implikację w lewo. Załóżmy, że istnieje taka różniczkowalna  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , że  $f(x, y) = xy\varphi(x^2 + y^2)$  dla wszystkich  $x, y > 0$ . Korzystając z twierdzenia o pochodnej złożenia mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y\varphi(x^2 + y^2) + 2x^2y\varphi'(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x\varphi(x^2 + y^2) + 2xy^2\varphi'(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Wstawiając otrzymane wzory do równania z zadania otrzymujemy żadaną równość.

Aby udowodnić implikację w prawo podstawmy  $g(x, y) = \frac{f(x, y)}{xy}$ . Oczywiście dla  $x, y > 0$  funkcja  $f$  jest różniczkowalna wtedy i tylko wtedy gdy różniczkowalna jest funkcja  $g$ . Korzystając z twierdzenia o pochodnej złożenia mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yg(x, y) + xy\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xg(x, y) + xy\frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Wstawiając obliczone pochodne do równanie, które spełnia  $f$  otrzymujemy po lewej stronie

$$y^2g(x, y) + xy^2\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - x^2g(x, y) + x^2y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = (y^2 - x^2)g(x, y) + xy\left(y\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)$$

oraz po prawej stronie

$$(y^2 - x^2)g(x, y).$$

Ponieważ  $x, y > 0$ , to równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

$$y\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = x\frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Zatem gradient funkcji  $g$  w punkcie  $(x, y)$  jest prostopadły do wektora  $[y, -x]$ . Zatem okręgi o środku w  $(0, 0)$  są poziomiami funkcji  $g$  (właściwie ćwiartki tych okręgów leżące w pierwszej ćwiartce). To oznacza, że funkcja  $g$  zależy tylko od odległości od środka układu współrzędnych czyli  $g(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$ . Różniczkowalność funkcji  $g$  implikuje różniczkowalność funkcji  $\varphi$ .

**Zadanie 5.** Niech  $\mu$  będzie miarą określoną na borelowskich podzbiorach  $\mathbb{R}$  taką, że  $\mu(A) = 1$  dla każdego  $A$  takiego, że  $\lambda_1(A) = 1$ . Udowodnij, że

- a)  $\mu(Z) = 0$  dla dowolnego borelowskiego  $Z$  takiego, że  $\lambda_1(Z) = 0$ ;
- b) jeśli  $b - a = \frac{1}{2}$ , to  $\mu([a, b]) = \frac{1}{2}$ ;
- c)  $\mu([a, b]) = b - a$  dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ .

**Rozwiązanie.**

a) Niech  $Z \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem borelowskim, takim że  $\lambda_1(Z) = 0$ . Weźmy dowolny  $A \subset \mathbb{R}$  borelowski, taki że  $\lambda_1(A) = 1$  (np.  $A = [0, 1]$ ). Oczywiście zbiory  $A \cup Z$ ,  $A \cap Z$ ,  $Z \setminus A$  są borelowskie oraz  $\lambda_1(A \cup Z) = \lambda_1(A \cap Z) = 1$ .

$$1 = \lambda_1(A \cup Z) = \mu(A \cup Z) = \mu(A) + \mu(Z \setminus A) = 1 + \mu(Z \setminus A),$$

bo  $\lambda_1(A) = 1$ . Z drugiej strony  $\lambda_1(A \setminus Z) = 1$ , więc  $\mu(A \setminus Z) = 1$ , co implikuje

$$1 = \mu(A) = \mu(A \cap Z) + \mu(A \setminus Z) = 1 + \mu(A \cap Z).$$

Zatem, mamy  $\mu(Z \setminus A) = 0$  oraz  $\mu(A \cap Z) = 0$ . Stąd, ponieważ  $\mu$  jest miarą, dostajemy

$$\mu(Z) = \mu(Z \setminus A) + \mu(Z \cap A) = 0 + 0 = 0.$$

**b) Niewprost.** Przypuśćmy, że dla pewnych  $a, b$  zachodzi  $b - a = \frac{1}{2}$  oraz  $\mu([a, b]) \neq \frac{1}{2}$ . Dla ustalenia uwagi założmy, że  $\mu([a, b]) > \frac{1}{2}$ . Rozważmy dwa zbiory:  $[a + 1, b + 1]$  oraz  $[a - 1, b - 1]$ . Oczywiście  $a < b = a + \frac{1}{2} < a + 1 < b + 1$  oraz  $a - 1 < b - 1 = a - \frac{1}{2} < a$ . Zatem zbiory  $[a, b]$ ,  $[a + 1, b + 1]$  oraz  $[a - 1, b - 1]$  są parami rozłączne. Ponieważ  $\lambda_1([a, b] \cup [a + 1, b + 1]) = 1$ , to mamy

$$1 = \mu([a, b] \cup [a + 1, b + 1]) = \mu([a, b]) + \mu([a + 1, b + 1]) \implies \mu([a + 1, b + 1]) < \frac{1}{2}.$$

Podobnie

$$1 = \mu([a, b] \cup [a - 1, b - 1]) = \mu([a, b]) + \mu([a - 1, b - 1]) \implies \mu([a - 1, b - 1]) < \frac{1}{2}.$$

Stąd

$$1 = \mu([a - 1, b - 1] \cup [a + 1, b + 1]) = \mu([a - 1, b - 1]) + \mu([a + 1, b + 1]) < 1.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że przyjęte założenie  $\mu([a, b]) > \frac{1}{2}$  było fałszywe. Analogiczny argument dowodzi, że  $\mu([a, b]) < \frac{1}{2}$  nie może być spełnione. To dowodzi tezy.

**c) Przekonajmy się, że rozumowanie oparte na tym z poprzedniego punktu doprowadzi nas do konkluzji, że jeśli  $b - a = \frac{1}{4}$ , to  $\mu([a, b]) = \frac{1}{4}$ . Niech  $I, J$  będą rozłącznymi odcinkami, każdy o długości  $\frac{1}{4}$ . Wykażemy, że  $\mu(I \cup J) = \frac{1}{2}$ . Weźmy dowolny odcinek domknięty  $W$  o długości  $\frac{1}{2}$  rozłączny zarówno z  $I$  jak i z  $J$ . Oczywiście  $\lambda_1(I \cup J \cup W) = 1$  oraz (z punktu **b))  $\mu(W) = \frac{1}{2}$ . Stąd, addytywność miary dowodzi, że  $\mu(I \cup J) = \frac{1}{2}$ . Teraz możemy powtórzyć rozumowanie z punktu **b)** dla odcinków długości  $\frac{1}{4}$  (zamiast  $\frac{1}{2}$ ) i uzyskujemy tezę że jeśli  $b - a = \frac{1}{4}$ , to  $\mu([a, b]) = \frac{1}{4}$ . Zatem korzystając z indukcji matematycznej otrzymujemy implikację: jeśli  $b - a = \frac{1}{2^k}$  dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$ , to  $\mu([a, b]) = \frac{1}{2^k}$ .****

Jeśli  $b - a = \frac{m}{2^k}$  dla  $k, m \in \mathbb{N}$ , to  $\mu([a, b]) = \frac{m}{2^k}$ , bo odcinek taki składa się z  $m$  odcinków długości  $\frac{1}{2^k}$ , których częścią wspólna są zbiory miary zero.

Niech  $a < b$  będą dowolne rzeczywiste. Z analizy I wiemy, że istnieją ciągi  $a_n = \frac{m_n}{2^{k_n}}$  oraz  $b_n = \frac{\ell_n}{2^{k_n}}$ , takie że  $k_n \in \mathbb{N}$ ,  $m_n, \ell_n \in \mathbb{Z}$ ,  $a \leq a_n < b_n \leq b$ . Z udowodnionych własności mamy  $\mu([a_n, b_n]) = \frac{\ell_n - m_n}{2^{k_n}}$  oraz (oczywiście)  $\frac{\ell_n - m_n}{2^{k_n}} \rightarrow b - a$ . Ciąg przedziałów  $[a_n, b_n]$  jest wspępujący zatem

$$\mu([a, b]) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu([a_n, b_n]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell_n - m_n}{2^{k_n}} = b - a.$$

**Analiza 2.1 - Zadanie 2 - przykładowe rozwiązanie i kryteria ocen**  
(Agnieszka Kałamańska)

## 1 Rozwiązanie zadania

*Z podziałem na pytania.*

### **Zadanie 2.**

- (a) Uzasadnić, że funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x, y) = x^3 y^2 \left( \frac{3x^2}{7} + \frac{2y^2}{7} - 1 \right)$  przyjmuje na zbiorze  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3x^2}{7} + \frac{2y^2}{7} \leq 1\}$  wartość najmniejszą i największą.  
(b) Znaleźć te wartości i punkty, w których są przyjmowane ekstrema.  
(c) Rozstrzygnąć, czy funkcja  $f$  ma ekstremum lokalne w punkcie  $p = (0, \frac{\sqrt{7}}{2})$ .

### **Rozwiązanie:**

#### **Metoda 1 (klasyczna).**

**Ad (a):** Funkcja  $f$  jest ciągła (wielomian), zbiór  $A$  jest zwarty, jako zbiór domknięty i ograniczony. Istotnie,

-  $A$  jest ograniczony, bo jest zawarty w kostce:  $[0, 2] \times [0, 2]$  ( $\frac{3x^2}{7} \leq 1 \implies x^2 \leq \frac{7}{3} \leq 4$ ,  $\frac{2y^2}{7} \leq 1 \implies y^2 \leq \frac{7}{2} \leq 4$ )

-  $A$  jest domknięty, bo  $A = g^{-1}(-\infty, 1]$  dla funkcji ciągłej  $g(x, y) = \frac{3x^2}{7} + \frac{2y^2}{7}$ , zbiór  $(-\infty, 1]$  jest domknięty, więc  $A$  jest domknięty, jako przeciwobraz funkcji ciągłej zbioru domkniętego.

Z twierdzenia Weierstrassa o osiągnięciu kresów,  $f$  osiąga swoje oba kresy na zbiorze  $A$ .

**Ad (b):** Niezmienniki:  $f$  jest symetryczna względem  $y$  i antysymetryczna względem  $x$ , zatem wystarczy przeanalizować  $f$  na zbiorze  $A_{+,+} = A \cap [0, +\infty)^2$  i odpowiednio rozprowadzić ekstrema. Funkcja  $f$  przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne, więc wartość 0 nie jest ekstremum. Na brzegu  $A_{+,+}$   $f$  jest równa zero, we wnętrzu ujemna, dlatego  $f$  osiągnie swoje globalne minimum we wnętrzu  $A$ .

Z twierdzenia Fermata minimum znajdziemy wśród punktów krytycznych  $f$ , czyli tam, gdzie zeruje się gradient.

Obliczamy gradient we wnętrzu  $A$ :

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left( 3x^2 y^2 \left( \frac{5x^2}{7} + \frac{2y^2}{7} - 1 \right), 2x^3 y \left( \frac{3x^2}{7} + \frac{4y^2}{7} - 1 \right) \right) \\ &= (0, 0) \iff \frac{5x^2}{7} + \frac{2y^2}{7} = 1, \text{ oraz } \frac{3x^2}{7} + \frac{4y^2}{7} = 1.\end{aligned}$$

Łatwy rachunek (odejmijmy ostatnie dwa równania od siebie) pokazuje, że minimum jest w punkcie  $x = y$ , po podstawieniu znajdujemy jedyny punkt zerowania się gradientu:  $(1, 1)$  i tam mamy  $f(1, 1) = \min f = -\frac{2}{7}$ . Stąd (warunki symetrii):

$$\min_A f = f(1, 1) = f(1, -1) = -\frac{2}{7}, \quad \max_A f = f(-1, 1) = f(-1, -1) = \frac{2}{7}.$$

**Ad (c):** Punkt  $p$  leży we wnętrzu elipsy, zatem  $f(p) = 0$ ,  $\frac{3x^2}{7} + \frac{2y^2}{7} - 1 < 0$  we wnętrzu elipsy, oraz dla dowolnego  $\epsilon > 0$

$$F(-\epsilon, \frac{\sqrt{7}}{2}) > 0, \quad F(\epsilon, \frac{\sqrt{7}}{2}) < 0.$$

Stąd, dowolnie blisko  $p$  funkcja  $f$  przyjmuje zarówno wartości większe jak i niejsze od  $f(p)$ . W punkcie  $p$  nie ma ekstremum lokalnego.

## Metoda 2 (niestandardowa<sup>1</sup> dla punktu (b)).

Po uwzględnieniu symetrii, ograniczmy się do zbioru  $A_{+,+}$  i zamiast  $f$  zbadajmy funkcję  $-f$ . Z nierówności pomiędzy średnimi:

$$G(x^2, x^2, x^2, y^2, y^2) = \sqrt[5]{x^6 y^4} = (x^3 y^2)^{\frac{2}{5}} \leq A(x^2, x^2, x^2, y^2, y^2) = \frac{3x^2 + 2y^2}{5}.$$

Stąd:

$$\begin{aligned} -f(x, y) &\leq h(x, y) := \left(\frac{3x^2 + 2y^2}{5}\right)^{\frac{5}{2}} \left(1 - \left(\frac{3x^2}{7} + \frac{5y^2}{7}\right)\right) \\ &= \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{3x^2 + 2y^2}{7}\right)^{\frac{5}{2}} \left(1 - \left(\frac{3x^2}{7} + \frac{2y^2}{7}\right)\right) := g(t(x, y)), \end{aligned}$$

gdzie  $g(t) = \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{5}{2}} t^{\frac{5}{2}} (1 - t)$ ,  $t(x, y) := \frac{3x^2}{7} + \frac{2y^2}{7} \in [0, 1]$  na  $A_{+,+}$ . Obliczamy maksimum funkcji  $g(\cdot)$  na  $[0, 1]$ :  $g(0) = g(1) = 0$ , oraz  $g'(t) = 0 \iff t = \frac{5}{7} \in (0, 1)$ . Zatem  $\max_{[0,1]} g = g(\frac{5}{7}) = \frac{2}{7}$ . Mamy zatem

$$\max(-f) \leq \frac{2}{7}.$$

To nie oznacza jeszcze, że  $\max(-f) = \frac{2}{7}$ . Tak magicznie jest w tym wypadku, gdyż zawsze  $-f(x, y) \leq \frac{2}{7}$ , oraz  $-f(1, 1) = \frac{2}{7}$ . Wartość  $t(x, y) = \frac{5}{7}$  nie jest przyjęta jeden raz na  $A_{+,+}$ , lecz w punkcie odpowiadającym  $t(x, x) = \frac{5}{7}$  mamy równość średnich arytmetycznej i geometrycznej, zatem tylko tam  $-f = h$ .

## 2 Kryteria ocen

**Pytanie (a)** maksymalnie 1/1 pt

**Pytanie (b)** maksymalnie 5/5 pt

**Pytanie (c)** maksymalnie 2/2 pt

Nie punktowałam maksymalnie prac, gdzie brakowało sformułowań odpowiednich twierdzeń (Weierstrassa, Fermata), czyli powołania się na wiedzę teoretyczną.

---

<sup>1</sup>Zaproponował pan Mikołaj Tomaszewicz

#### Zad. 4 a) – przykładowe rozwiązanie, uwagi, punktacja

Przykładowe rozwiązanie zad. 4 a). Funkcja  $\nu^*: X \rightarrow [0, \infty)$  jest oczywiście dobrze określona i przyjmuje wartości nieujemne (skończone, a nawet ograniczone z góry przez 1). Trzeba sprawdzić, że zachodzą trzy własności z definicji miary zewnętrznej.

Mamy  $\nu^*(\emptyset) = \frac{\mu^*(\emptyset)}{1 + \mu^*(\emptyset)} = 0$ , ponieważ  $\mu^*(\emptyset) = 0$  (bo  $\mu^*$  jest miarą zewnętrzną).

Monotoniczność: jeśli  $A \subset B$ , to

$$\nu^*(A) = \frac{\mu^*(A)}{1 + \mu^*(A)} \leq \frac{\mu^*(B)}{1 + \mu^*(B)} = \nu^*(B),$$

ponieważ funkcja  $t \mapsto \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$  jest niemalejąca na  $[0, \infty)$  oraz  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  (bo  $\mu^*$  jest miarą zewnętrzną).

Przeliczalna podaddytywność: jeśli  $A_1, A_2, \dots \subset X$ , to

$$\begin{aligned} \nu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \frac{\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}{1 + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} && \text{(z definicji)} \\ &\leq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)}{1 + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} && \text{(szacujemy licznik z podaddytywności } \mu^*) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^*(A_n)}{1 + \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)} && \text{(wciągamy mianownik pod sumę)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^*(A_n)}{1 + \mu^*(A_n)} && \text{(szacujemy mianowniki z monotoniczności } \mu^*) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(A_n) && \text{(z definicji), c.k.d.} \end{aligned}$$

(proszę zwrócić uwagę, że trzecim kroku zmieniliśmy nazwę indeksu w mianowniku (z  $n$  na  $j$ ), żeby uniknąć zamieszania i konfliktu oznaczeń, a także że w czwartym kroku w każdym ze składników sumy mianownik szacujemy inaczej).  $\square$

Można też było to zrobić nieco inaczej, np. tak:

$$\begin{aligned} \nu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \frac{\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}{1 + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)} && \text{(z definicji)} \\ &\leq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)} && \text{(monotoniczność } t \mapsto \frac{t}{1+t} \text{ i podaddytywność } \mu^*) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^*(A_n)}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)} && \text{(wciągamy mianownik pod sumę)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^*(A_n)}{1 + \mu^*(A_n)} && \text{(szacujemy każdy mianownik)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(A_n) \quad (\text{z definicji}).$$

Do zdobycia były 4 punkty; punktowałem tak:

- 1 punkt za wykazanie monotoniczności (w szczególności jeśli ktoś zapomniał o tym warunku, to tracił ten 1 punkt),
- 1,5 punkta za poprawne sformułowanie warunku przeliczalnej podaddytywności (przeliczone sumy, nierówność, nie zakładamy nic o zbiorach  $A_n$ ),
- 1,5 punkta za przeprowadzanie dowodu podaddytywności.

Jeśli ktoś wykazał poprawnie, że dla par zbiorów mamy  $\nu^*(A \cup B) \leq \nu^*(A) + \nu^*(B)$ , to mógł dostać punkty za dowód, ale nie dostawał punktów za poprawne sformułowanie warunku. Niektórzy w dowodzie przeliczalnej podaddytywności wypisywali tylko część przekształceń (pomijali jakieś środkowe kroki), tak że nie było wiadomo, czy rozwiązanie jest niedokończone, czy może jest blefem, czy korzysta z „tożsamości”

$$\sum \frac{a_n}{b_n} \stackrel{?!}{=} \frac{\sum a_n}{\sum b_n},$$

czy też niektóre fragmenty nie są szczegółowo uzasadnione (odejmowałem wtedy jakieś punkty).

#### Zad. 4 b) – szkic rozwiązania, punktacja, uwagi

W podpunkcie b) należało:

1. zapisać  $A = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} A_{p,q}$ , gdzie  $A_{p,q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : px + qy = 2024\}$ ;
2. zauważyć, że (dla  $(p, q) \neq (0, 0)$ ) zbiór  $A_{p,q}$  to PROSTA (na płaszczyźnie);
3. uzasadnić, że zbiory  $A_{p,q}$  są mierzalne i  $\lambda_2(A_{p,q}) = 0$ ;
4. skonkludować, że  $A$  też jest mierzalny i też ma miarę zero, bo jest sumą PRZELICZALNIE WIELU zbiorów miary zero.

Za wykazanie jedynie mierzalności zbioru  $A$  (np. powiedzenie, że  $A$  to suma przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych, a więc zbiór borelowski), stawiałem 1 punkt.

Ad 1–2. Zaznaczam, że nie jest prawdą, że jeśli suma dwóch liczb rzeczywistych jest wymierna, to obydwa składniki są liczbami wymiernymi (por.  $p = q = 1$ ,  $x = \sqrt{2}$ ,  $y = 2024 - \sqrt{2}$ ; w szczególności nie jest prawdą, że  $A \subset \mathbb{Q}^2$ ).

Ad 1–4. Jeśli rozwiązanie wykazywało ogólne zrozumienie materii, to raczej nie czepiałem się przesadnie o drobne szczegóły (np. o przypadek  $q = 0$ ).

Ad 3. „Należy szczegółowo uzasadniać rozwiązania powołując się na odpowiednie twierdzenia, lematy...” (a polecenie też wprost prosiło o uzasadnienie mierzalności  $A$ ). Można się było powołać np. na twierdzenie z wykładu o mierze podprzestrzeni afinicznej mniejszego wymiaru lub powiedzieć, że (dla  $q \neq 0$ )  $A_{p,q}$  to wykres funkcji ciągłej i powołać się na fakt z ćwiczeń. Odejmołem 1 punkt, jeśli ktoś zupełnie pomijał uzasadnienie.

M.St.